Mihai Burdușa
Școala Gimnazială Mihai Eminescu
Pitești
mihai@burdusa.ro
www.mihai.burdusa.ro

Model EN 2019 - Rezolvare
Matematică

1 Subiectul I

1. $18 + 18 : 6 = 18 + 3 =$ 21

2. $\frac{x}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 4}{2} =$ 10

3. Cel mai mare număr par din mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ este 6.

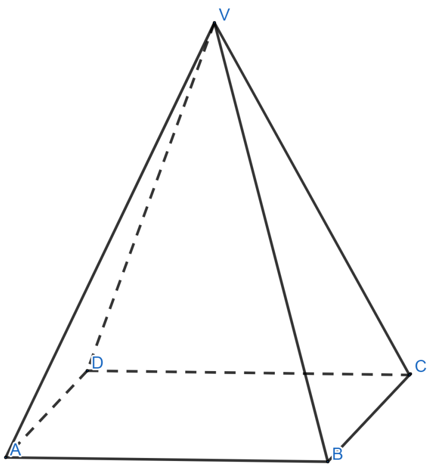
4. Punctele D, E, F sunt mijloacele laturilor triunghiului $ABC \Rightarrow [DE], [EF], [FD]$ sunt linii mijlocii în triunghiul $ABC \Rightarrow DE + EF + FD = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{CA}{2} = \frac{6}{2} + \frac{8}{2} + \frac{10}{2} = 3 + 4 + 5 = 12$, deci $P_{DEF} = 12$ cm.

5. $AA' \parallel BB' \Rightarrow m(\widehat{AD', BB'}) = m(\widehat{AD', AA'}) = m(\measuredangle A'AD') =$ 45°

6. Numărul total de participanți este $15 + 8 + 10 + 5 + 3 + 9 = 50$. Numărul de participanți din Franța este $10 = p\%$ din $50 \Rightarrow 10 = \frac{p}{100} \cdot 50 \Rightarrow 10 = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 10 \cdot 2 = 20$. Așadar 20% din participanți sunt din Franța.

2 Subiectul II

1.



2. $a = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$

$b = 7 - \frac{12}{\sqrt{3}} = 7 - \frac{12\sqrt{3}}{3} = 7 - 4\sqrt{3}$

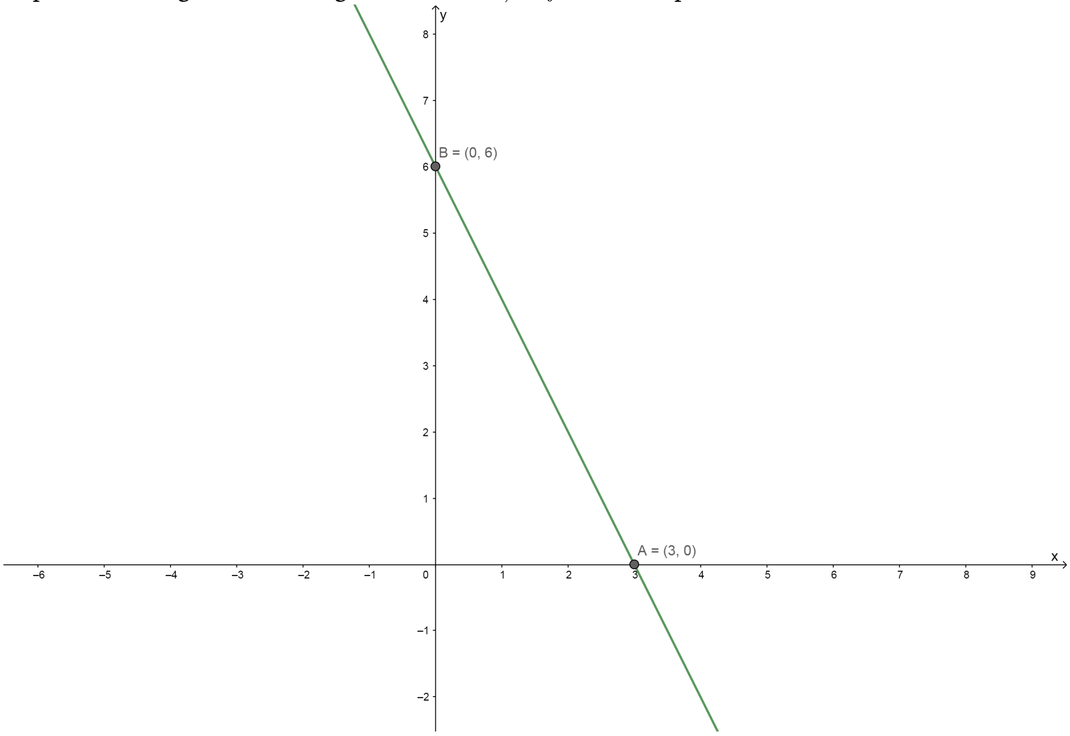
Rezultă că media aritmetică a numerelor a și b este $m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{14}{2} =$ 7

3. Fie n numărul de elevi și p numărul de bănci din clasă. Din datele problemei rezultă

$$\begin{cases} n = 3(p-4) \\ n = 2(p-1) + 1 \end{cases} \Rightarrow 3(p-4) = 2(p-1) + 1 \Rightarrow 3p - 12 = 2p - 1 \Rightarrow 3p - 2p = -1 + 12 \Rightarrow \text{p=11}$$

4.

a) Pentru $a=-2,\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+6$.
$f(x)=0 \Rightarrow -2x+6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow A(3,0)\in G_f$,
$f(0)=-2\cdot 0+6=0+6=8 \Rightarrow B(0,6)\in G_f$.
Reprezentarea geometrică a graficului funcției f este dreapta AB.



b) $f(x)=0 \Rightarrow ax+6=0 \Rightarrow ax=-6 \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} x=-\frac{6}{a} \Rightarrow G_f \bigcap Ox = \left\{A\left(-\frac{6}{a},0\right)\right\} \Rightarrow OA=\left|-\frac{6}{a}\right|=\frac{6}{|a|}$

$f(0)=a\cdot 0+6=0+6=6 \Rightarrow G_f\bigcap Oy=\{B(0,6)\} \Rightarrow OB=6$.

În triunghiul OAB dreptunghic în O avem $\operatorname{tg}(\measuredangle OAB)=\frac{OB}{OA}=\frac{6}{\frac{6}{|a|}}=6\cdot\frac{|a|}{6}=|a| \Rightarrow |a|=2 \Rightarrow a\in\{-2,2\}$.

5. Fie $x\in\mathbb{R}\backslash\{-3,-2,-1,3\}$. Avem

$$E(x)=\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}-\frac{1}{9-x^2}\right):\frac{x+2}{x^2-9}=\left(\frac{x+1}{x-3}-\frac{x^2+x+2x+2}{x^2+x+3x+3}+\frac{1}{x^2-9}\right):\frac{x+2}{x^2-9}=$$

$$=\left[\frac{x+1}{x-3}-\frac{x(x+1)+2(x+1)}{x(x+1)+3(x+1)}+\frac{1}{(x-3)(x+3)}\right]\cdot\frac{x^2-9}{x+2}=$$

$$=\left[\frac{x+1}{x-3}-\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x-3)(x+3)}\right]\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}=$$

$$=\left[\frac{x+1}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{1}{(x-3)(x+3)}\right]\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}=$$

$$=\frac{x+1}{x-3}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}-\frac{x+2}{x+3}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}+\frac{1}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x+2}=$$

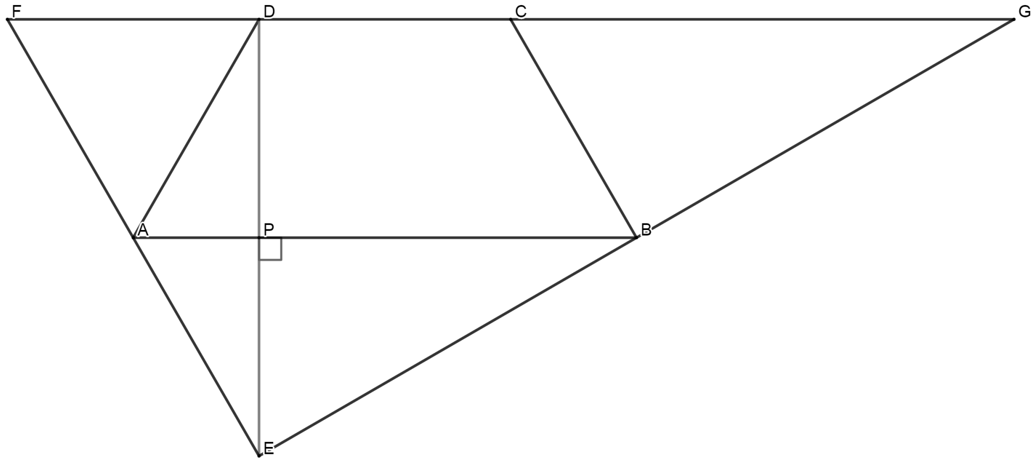
$$=\frac{(x+1)(x+3)}{x+2}-(x-3)+\frac{1}{x+2}=\frac{x^2+4x+3}{x+2}+\frac{1}{x+2}-(x-3)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}-x+3=$$

$$=\frac{(x+2)^2}{x+2}-x+3=x+2-x+3=5$$

$E(m)=2m+1 \Rightarrow 2m+1=5 \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow$ m=2 $\in\mathbb{R}\backslash\{-3,-2,-1,3\}$

3 Subiectul III

1. a) $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 18 + 3 \cdot 6 = 12 + 18 = \boxed{30}$ cm



b)
Fie $\{P\} = DE \bigcap AB$. Cum E este simetricul lui D față de AB rezultă $DE \perp AB$ și $DP = PE$ și cum $ABCD$ este trapez isoscel $\Rightarrow AP = \dfrac{AB - CD}{2} = 3$ cm.

Avem, așadar, în $\triangle APD$ dreptunghic în P, $AP = \dfrac{AD}{2}$, rezultă că $m(\measuredangle ADP) = 30°$ și $m(\measuredangle DAP) = 60°$.
$FD \parallel AB$ și AD secantă $\Rightarrow \measuredangle FDA \equiv \measuredangle DAP \Rightarrow m(\measuredangle FDA) = 60°$.
Pe de altă parte, în triunghiul DAE, $[AP]$ este mediană și înălțime $\Rightarrow \triangle DAE$ este isoscel cu baza $[DE]$ și cum $m(\measuredangle ADE) = 30° \Rightarrow m(\measuredangle DAE) = 180° - 2 \cdot 30° = 120° \Rightarrow m(\measuredangle FAD) = 180° - 120° = 60°$.
Prin urmare, în $\triangle ADF$ avem $m(\measuredangle FDA) = m(\measuredangle FAD) = 60°$ deci triunghiul $\boxed{ADF \text{ este echilateral}}$.

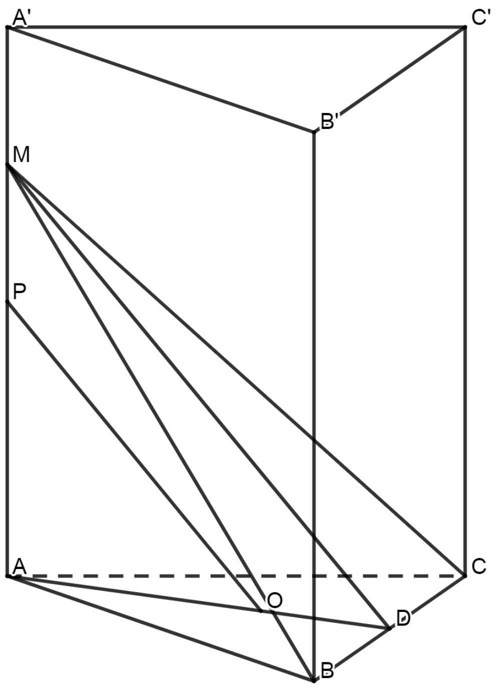
c) $\triangle DAE$ isoscel cu baza $[DE]$ și $[AP]$ înălțime $\Rightarrow AE = AD = 6$ cm și $m(\measuredangle DAP) = m(\measuredangle EAB) = \dfrac{120°}{2} = 60°$.

Avem $\begin{cases} \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{AP}{AE} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \\ \measuredangle DAP \equiv \measuredangle EAB \end{cases} \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle AEB \Rightarrow m(\measuredangle AEB) = m(\measuredangle APD) = 90°$, de unde rezultă că $\boxed{EF \perp EG}$.

2. a) $A_l = P_{ABC} \cdot AA' = 3 \cdot 10 \cdot 12 = \boxed{360 \text{ cm}^2}$

b) Fie D mijlocul lui $[BC]$. $\triangle ABC$ echilateral $\Rightarrow AD \perp BC$.
Cum $ABCA'B'C'$ este prismă dreaptă, avem $AA' \perp (ABC)$, $AD \perp BC$, $AD, BC \subset (ABC)$. Din teorema celor 3 perpendiculare, reztulă că $MD \perp BC$, deci $d(M, BC) = MD$.

Pe de altă parte, $[AD]$ înălțime în triunghiul echilateral ABC cu $AB = 10$ cm $\Rightarrow AD = \dfrac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm.
$AA' \perp (ABC)$, $AD \subset (ABC) \Rightarrow AA' \perp AD \Rightarrow \triangle MAD$ dreptunghic în A, iar din teorema lui Pitagora obținem $MD^2 = MA^2 + MD^2 = 9^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 = 81 + 75 = 156 \Rightarrow MD = \sqrt{156} = 2\sqrt{39} \Rightarrow \boxed{d(M, BC) = 2\sqrt{39}}$



c) O centrul cercului circumscris triunghiului echilateral $ABC \Rightarrow O$ este și centrul de greutate al acestuia și cum $[AD]$ mediană în $\triangle ABC \Rightarrow O \in AD$ și $\dfrac{AO}{OD} = 2$

De asemenea, P mijlocul lui $AA' \Rightarrow AP = \dfrac{AA'}{2} = 6$ cm, iar $MP = AM - AP = 9 - 6 = 3$ cm și, deci, $\dfrac{AP}{PM} = 2$. Conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă că $PO \parallel MD$ și cum $P \notin (MBC),\ MD \subset (MBC) \Rightarrow$ $PO \parallel (MBC)$.