Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală, 16 februarie 2019
Clasa a IX – a
VARIANTA 1

IX

SUBIECTE:

1. Să se arate că numărul $A=3\underbrace{99...9}_{2018 cifre}76\underbrace{00...0}_{2018 cifre}56$, $n\in N$, se poate scrie ca suma pătratelor a patru numere naturale pare consecutive. **(7p)**

Prof. Gobej Adrian, Curtea de Argeș

2. Să se arate că $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^4}\right)<\frac{9}{4}, (\forall) n\in N^*$ **(7p)**

Prof. Silviu Graure, Pitești

3. Fie x număr real și a,b,p numere naturale nenule, $(a,b)=1$, astfel încât $1+x+x^2+...+x^n\neq 0$, oricare ar fi $n\in N$. Arătați că dacă $\left(1+x+x^2+...+x^n\right)^a\in Q$ și $\left(1+x+x^2+...+x^n\right)^b\in Q$, oricare ar fi $n\in\{p,p+1\}$, atunci $x\in Q$. **(7p)**

Prof. Cosmin Manea și Dragoș Petrică, Pitești

4. a) Să se demonstreze că două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ au același centru de greutate dacă și numai dacă $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ **(4p)**

b) În planul unui triunghi ABC se consideră punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PA}$. Fie G_1,G_2,G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BNM, CPN. Să se demonstreze că triunghiurile ABC și $G_1G_2G_3$ au același centru de greutate. **(3p)**

***

O carte face cât un lingou de aur. Banii nu aduc învăţătura, dar învăţătura aduce bani.
(Proverbe româneşti)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaje cuprinse între 0-7 puncte.
Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.
Timp de lucru: 3 ore.