Mihai Burdușa
Școala Mihai Eminescu Pitești
mihai@burdusa.ro
www.mihai.burdusa.ro

EN 2019 - Rezolvare
Matematică

Subiectul I

1. $25 - 20 : 5 = 20 - 4 = \boxed{21}$

2. 10% din $1500 = \dfrac{10}{100} \cdot 1500 = \boxed{150}$

3. Cel mai mic număr impar din mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ este $\boxed{1}$.

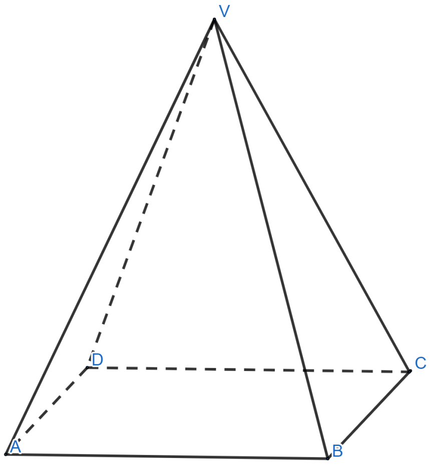
4. $P = 4l = 4 \cdot 10 = \boxed{40}$ cm.

5. $A_t = 4 \cdot A_{ABC} = 4 \cdot 4 = \boxed{16}$ cm^2

6. $25^\circ - 20^\circ = \boxed{5}^\circ$

Subiectul II

1.



2. $a = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\right) = 3 \cdot \dfrac{3 - 2 + 1}{6} = \dfrac{2}{2} = 1$

$b = \dfrac{5}{3} : \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{3} : \dfrac{6 + 3 - 4}{12} = \dfrac{5}{3} : \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{12}{5} = 4$

Rezultă că media geometrică a numerelor a și b este $m_g(a, b) = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{1 \cdot 4} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

3. Conform teoremei împărțirii cu rest avem:

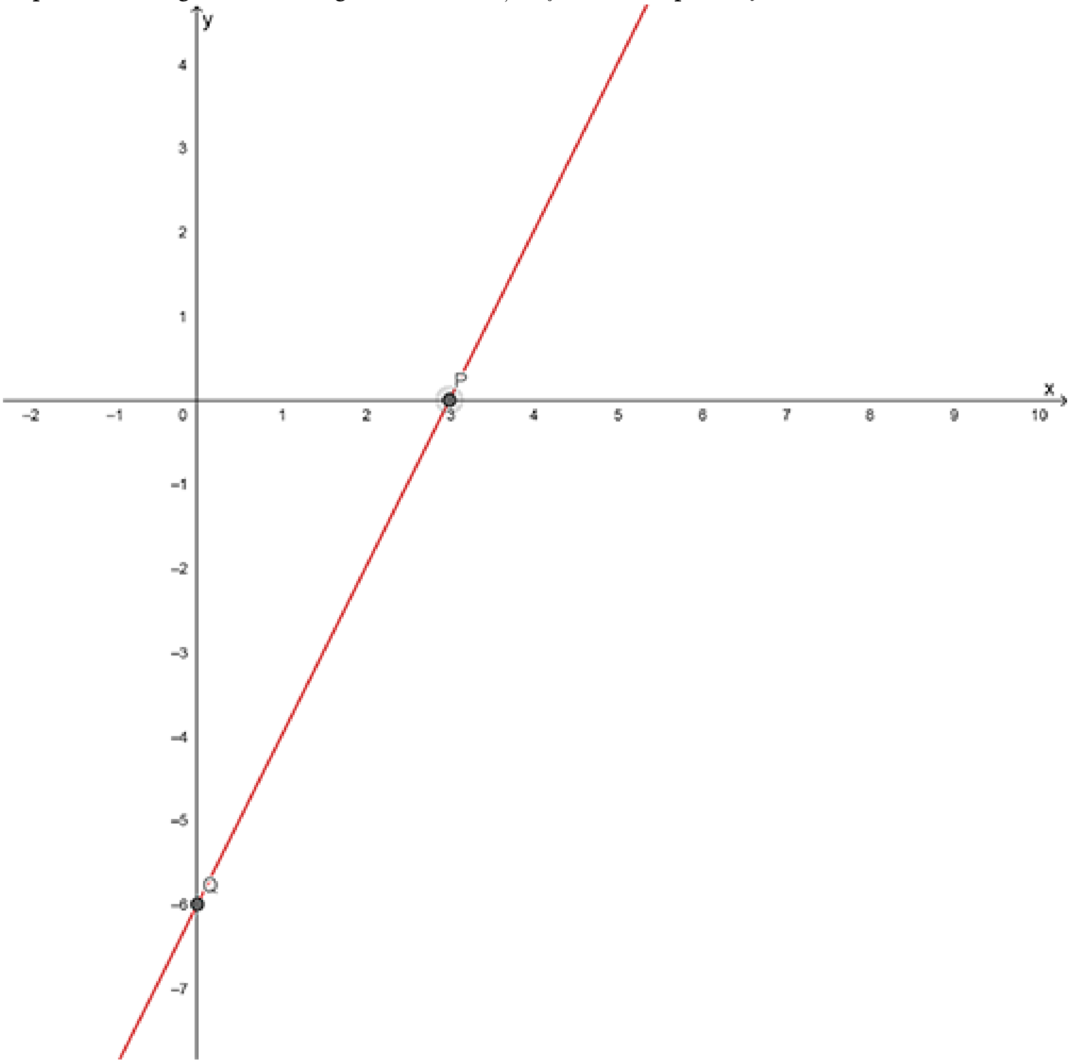
$$\begin{cases} 73 = nq_1 + 1 \\ 123 = nq_2 + 3 \\ 223 = nq_3 + 7 \end{cases}, n > 7 \Rightarrow \begin{cases} 72 = nq_1 \\ 120 = nq_2 \\ 216 = nq_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \mid 72 \\ n \mid 120 \\ n \mid 216 \end{cases}$$

Deci n este cel mai mare divizor comun al numerelor 72,120 și 216.

Cum $72 = 2^3 \cdot 3^2,\ 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5,\ 216 = 2^3 \cdot 3^3$ rezultă că $n = 2^3 \cdot 3 = 24 > 7$, deci $n = \boxed{24}$

4.

a) $f(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \Rightarrow P(3,0) \in G_f$,
$f(0)=2\cdot 0-6=0-6=-6 \Rightarrow Q(0,-6) \in G_f$.
Reprezentarea geometrică a graficului funcției f este dreapta PQ.

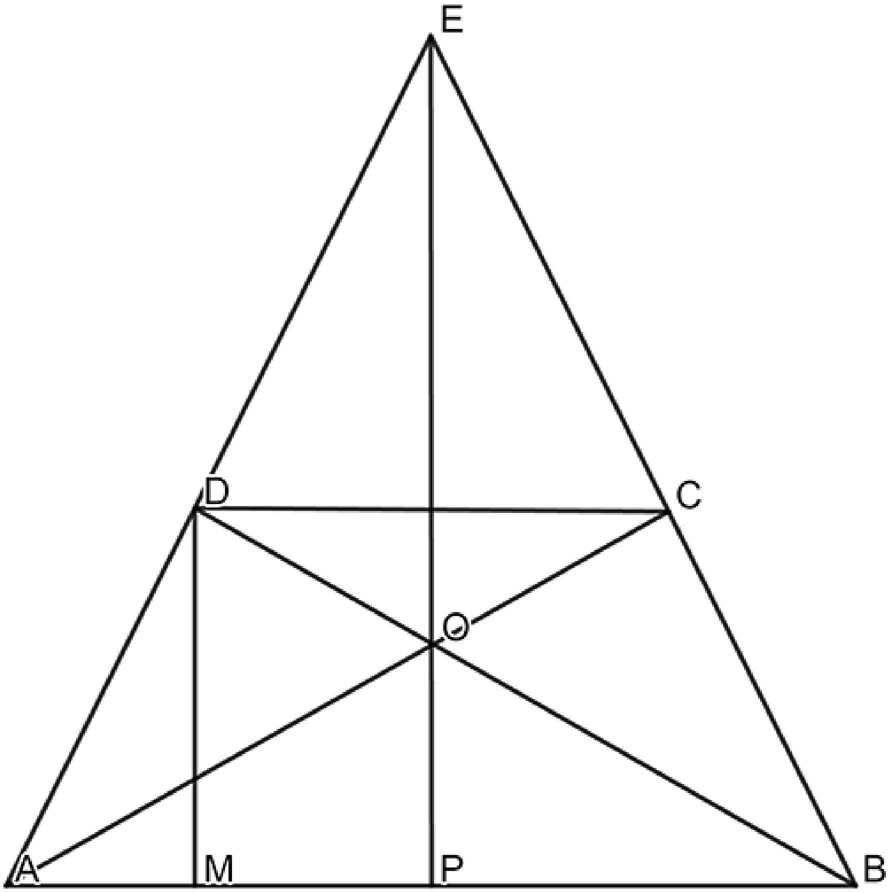


b) Fie S simetricul lui P față de O. Cum $P(3,0)$ rezultă $S(-3,0)$
$S(-3,0) \in G_g \Rightarrow g(-3)=0 \Rightarrow -3m+9=0 \Rightarrow 3m=9 \Rightarrow m=$ 3.

5. $x^2-x=x(x-1)$
$x^2-4x+3=x^2-x-3x+3=x(x-1)-3(x-1)=(x-1)(x-3)$
$x^2-1=(x-1)(x+1)$
Fie $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1,3\}$. Avem

$$E(x)=\left[\frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)}-\frac{3}{x-3}-\frac{x}{x+1}\right]:\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\left(\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x-3}-\frac{x}{x+1}\right):\frac{1}{x+1}=\left(\frac{x-3}{x-3}-\frac{x}{x+1}\right)\cdot$$
$$(x+1)=\left(1-\frac{x}{x+1}\right)\cdot(x+1)=\left(\frac{x+1}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right)\cdot(x+1)=\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)=1$$

Subiectul III



1.

a) $\triangle DMA$ dreptunghic în M și $m(\measuredangle MAD) = 45^\circ \Rightarrow \triangle AMD$ este isoscel, deci $AM = MD = x$.

Din teorema lui Pitagora în $\triangle DMA$ avem: $AM^2 + MD^2 = AD^2 \Rightarrow 2x^2 = 24^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{24^2}{x} \Rightarrow x = \dfrac{24}{\sqrt{2}} = \dfrac{24\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AM = 12\sqrt{2}$ cm.

b) $ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow AM = \dfrac{AB - CD}{2} \Rightarrow AB - CD = 2AM \Rightarrow AB = 2AM + CD \Rightarrow AB = 2 \cdot 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 24\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$

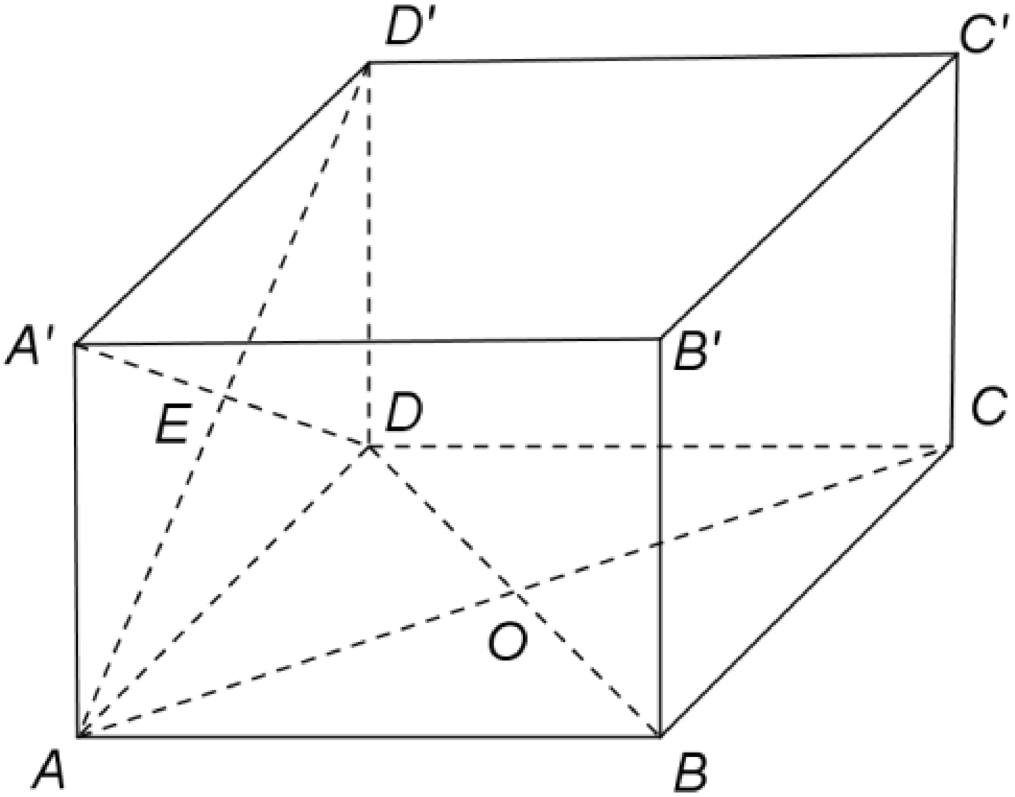
$ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow m(\measuredangle A) = m(\measuredangle B) \Rightarrow \triangle EAB$ este isoscel cu baza $[AB]$; (1)

P mijlocul lui $[AB] \Rightarrow [EP]$ mediană în $\triangle EAB \overset{(1)}{\Rightarrow} [EP]$ este și înălțime în $\triangle EAB \Rightarrow \triangle EAP$ este dreptunghic în P și cum $m(\measuredangle EAP) = 45^\circ \Rightarrow \triangle EAP$ este dreptunghic isoscel și $EP = AP = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{36\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$

$A_{EAB} = \dfrac{EP \cdot AB}{2} = \dfrac{18\sqrt{2} \cdot 36\sqrt{2}}{2} = 648$ cm^2

c) $ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow \begin{cases} AD = BC \\ m(\measuredangle BAD) = m(\measuredangle ABC) \\ AC = BD. \end{cases} \overset{LUL}{\Rightarrow} \triangle ABD \equiv \triangle BAC \Rightarrow \measuredangle ABD \equiv \measuredangle BAC \Rightarrow$ $\triangle OAB$ este isoscel cu baza $[AB]$; (2)

Cum P este mijlocul lui $[AB] \Rightarrow [OP]$ este mediană în $\triangle OAB \overset{(2)}{\Rightarrow} [OP]$ este și înălțime în $\triangle OAB \Rightarrow OP \perp AB$ și cum $EP \perp AB$ rezultă că dreptele EP și OB coincid, deci E, O, P sunt coliniare.



2.
a) $A_{ABCD} = AB^2 = 4^2 = 16$ cm^2
Volumul prismei este $V = A_{ABCD} \cdot AA' = 16 \cdot 2\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$ cm^3

b) $DD' \perp (ABC)$ și $DO \subset (ABC) \Rightarrow DD' \perp DO \Rightarrow \triangle D'DO$ este dreptunghic în D.
BD diagonală a pătratului $ABCD \Rightarrow BD = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow DO = \dfrac{BD}{2} = 2\sqrt{2}$
Din teorema lui Pitagora în $\triangle D'DO$ avem $D'O^2 = D'D^2 + DO^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 8 + 8 = 16 \Rightarrow D'O = 4$ cm.

c) E, O mijloacele segmentelor $[AD'], [AC] \Rightarrow [EO]$ este linie mijlocie în $\triangle AD'C \Rightarrow EO \parallel D'C$ și cum $BC' \parallel D'$ rezultă că $m(\widehat{BC', EO}) = m(\widehat{AD', D'C}) = m(\measuredangle AD'C)$

$$\begin{cases} D'D \perp (ABC) \\ DO \perp AC \\ DO, AC \subset (ABC) \end{cases} \overset{T3P}{\Rightarrow} D'O \perp AC$$

$\Rightarrow A_{D'AC} = \dfrac{D'O \cdot AC}{2} = \dfrac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$ cm^2.
Din teorema lui Pitagora în $\triangle D'DA$ dreptunghic în D avem: $D'A^2 = D'D^2 + AD^2 = (2\sqrt{2})^2 + 4^2 = 8 + 16 = 24 \Rightarrow AD' = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ cm.
Analog, $D'C = 2\sqrt{6}$ cm.
$A_{AD'C} = \dfrac{AD' \cdot D'C \cdot \sin \measuredangle AD'C}{2} = \dfrac{2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sin \measuredangle AD'C}{2} = 12 \cdot \sin \measuredangle AD'C \Rightarrow 12 \cdot \sin \measuredangle AD'C = 8\sqrt{2} \Rightarrow$
$\sin \measuredangle AD'C = \dfrac{8\sqrt{2}}{12} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$